TEOREMA DENSITAS PADA HIMPUNAN SEMUA BILANGAN SAMAR

Erik Maurten Firdaus[a,*], M. Adib Jauhari Dwi Putra[a], Findasari[a]
[a]Universitas Muhammadiyah Kudus
Jl. Ganesha 1 Purwosari Kudus Indonesia
Email: erikmaurteen@umkudus.ac.id

Abstrak

Bilangan samar adalah himpunan samar dengan beberapa sifat khusus. Di dalam tulisan ini, didefinisikan urutan pada himpunan semua bilangan samar. Penulis membuktikan Teorema Densitas pada himpunan semua bilangan samar yang dilengkapi dengan urutan $\prec$. Penulis menunjukkan bahwa di antara dua bilangan samar yang dapat dibandingkan, terdapat bilangan samar trapesium.

Kata Kunci: bilangan samar trapesium, urutan, teorema densitas

Abstract

A fuzzy number is a fuzzy set with some special properties. In this paper, we defined some orderings on the set of all fuzzy numbers. We proved the Density Theorem on the set of all fuzzy numbers with an ordering $\prec$. We showed that between any two fuzzy numbers, there exists a trapezoidal fuzzy number.

***Keywords**: trapezoidal fuzzy number, ordering, density theorem*

I. PENDAHULUAN

Himpunan samar diperkenalkan oleh L.A Zadeh dalam tulisan (Zadeh, 1965). Awalnya himpunan samar hanya digunakan dalam bidang sistem informasi (Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023). Himpunan samar kemudian digunakan dalam berbagai bidang lain di antaranya analisis keputusan, statistika dan riset operasi, psikologi, bioinformatika, dan lain-lain (Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023). Ada pula penelitian himpunan samar yang berbicara tentang analisis keputusan di dunia kesehatan. Hal ini dapat ditemukan dalam tulisan (Elamir et al., 2023).

Bilangan samar juga diperkenalkan oleh L. A. Zadeh dalam tulisan (Zadeh, 1965). Bilangan samar adalah himpunan samar yang memiliki beberapa sifat khusus. Salah satu karakterisasi bilangan samar adalah dengan menggunakan himpunan tingkat-α. Karakterisasi ini disajikan oleh (Basar, 2022; Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023; Kacprzak, 2017). Tidak berhenti sampai di situ, semua bilangan samar dihimpun lalu dilengkapi dengan urutan. Himpunan semua bilangan samar yang dilengkapi urutan dipelajari oleh (Benoumhani & Jaballah, 2017; Rojas-Medar et al., 2005).

Di dalam tulisan ini, penulis mendefinisikan urutan $\prec$ pada himpunan semua bilangan samar. Dengan menggunakan urutan tersebut, akan dibuktikan teorema densitas pada himpunan semua bilangan samar.

II. LANDASAN TEORI

Pada bagian ini, akan dipaparkan beberapa konsep dasar mengenai bilangan samar. Berikut ini definisi bilangan samar.

Definisi 2.1 (Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023)

Bilangan samar u adalah fungsi $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ yang memenuhi empat kondisi:

1) Terdapat $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ sehingga $u(\alpha_0) = 1$.
2) Fungsi u konveks
3) Fungsi u fungsi kontinu semi-atas
4) Himpunan $\overline{\{t \in \mathbb{R} | u(t) > 0\}}$ kompak di $\mathbb{R}$.

■

Selanjutnya, himpunan semua bilangan samar dinotasikan dengan $\mathcal{F}$. Bilangan samar dapat disajikan dalam bentuk lain yaitu dengan himpunan tingkat- α atau $[u]_\alpha$. Himpunan tingkat- α ini berupa interval tertutup di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1 (Basar, 2022; Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023; Kacprzak, 2017)

Diketahui u bilangan samar dan untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$. Empat pernyataan berikut berlaku:

i. Fungsi u^- terbatas, tidak turun dan kontinu kiri pada $(0,1]$
ii. Fungsi u^+ terbatas, u^+ tidak naik dan kontinu kiri pada $(0,1]$
iii. Fungsi u^- dan u^+ kontinu kanan di $\alpha = 0$
iv. Nilai $u^-(1) \leq u^+(1)$

Kebalikannya, jika fungsi u^- dan u^+ memenuhi i., ii., iii., iv., maka ada dengan tunggal bilangan samar u sehingga untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$.

■

Bilangan samar yang dimaksud dalam tulisan ini adalah bilangan samar u dengan u^- tidak turun pada [0,1] dan u^+ tidak naik pada [0,1]. Berikut ini diberikan contoh-contoh bilangan samar.

Contoh 2.1

Diberikan bilangan a, b, c, d dengan $a < b \leq c < d$. Didefinisikan untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, $[u]_\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$. Fungsi u^- dan u^+ memenuhi keempat syarat pada Teorema 2.1. Bilangan samar u yang terbentuk dinamakan bilangan samar trapesium. Untuk kasus khusus $b = c$, bilangan samar yang terbentuk dinamakan bilangan samar segitiga (Kacprzak, 2017).

■

Contoh 2.2

Untuk setiap $\alpha \in [0,1], [v]_\alpha = [0, 0]$. Fungsi v^- dan v^+ memenuhi keempat syarat pada Teorema 2.1. Bilangan samar v ini selanjutnya dituliskan dengan 0_F.

III. Metode Penelitian

Berdasarkan tulisan (Fernández-Sánchez & Úbeda-Flores, 2023) tentang definisi urutan $\preccurlyeq$ pada $\mathcal{F}$, penulis terinspirasi untuk mendefinisikan urutan yang lain yaitu $\prec$ pada himpunan $\mathcal{F}$. Dengan menggunakan urutan $\prec$ tersebut, dibuktikan Teorema Densitas pada himpunan semua bilangan samar. Bunyi Teorema Densitas pada $\mathcal{F}$ ini mengambil inspirasi dari Teorema Densitas pada $\mathbb{R}$. Penulis memberikan bukti berbagai teorema yang berhubungan dengan teorema Densitas secara deduktif. Pembuktian teorema berpijak dari pernyataan matematis yang telah dibuktikan, definisi, atau aksioma.

IV. Hasil dan Pembahasan

Akan didefinisikan urutan pada himpunan semua bilangan samar $\mathcal{F}$. Jika x dan y bilangan samar lalu syarat $y^-(1) < x^-(0)$ dan $x^+(0) < y^+(1)$ dipenuhi, maka ditulis $x \prec y$. Notasi $x \succ y$ memiliki makna $y \prec x$. Jika $x \prec y$ atau $x = y$, maka ditulis $x \preccurlyeq y$. Jika $y \preccurlyeq x$, maka dapat ditulis $x \succcurlyeq y$. Jika berlaku $x \prec y$, maka x dikatakan lebih kecil dari y. Bilangan $m \in M \subseteq \mathcal{F}$ disebut elemen terkecil M jika $m \preccurlyeq a$ untuk setiap $a \in M$. Untuk mempermudah penulisan, $x \prec y$ dan $y \prec w$ ditulis $x \prec y \prec w$.

Urutan $\prec$ pada himpunan $\mathcal{F}$ memiliki sifat transitif. Hal ini ditunjukkan dalam sifat berikut.

Sifat 4.1

Jika $u \prec v$ dan $v \prec w$, maka $u \prec w$.

Bukti:

Karena $u \prec v$, maka $v^-(1) < u^-(0)$ dan $u^+(0) < v^+(1)$. Karena $v \prec w$, maka $w^-(1) < v^-(0)$ dan $v^+(0) < w^+(1)$. Karena v^- tidak turun dan v^+ tidak naik, maka

$$w^-(1) < v^-(0) \leq v^-(1) < u^-(0) \text{ dan}$$
$$u^+(0) < v^+(1) \leq v^+(0) < w^+(1).$$

Hal ini berarti $u \prec w$.

■

Ada contoh-contoh bilangan samar yang tidak dapat dibandingkan dengan urutan $\prec$. Contoh yang dapat diberikan adalah bilangan samar u dan v dengan

$[u]_\alpha = [\alpha + 1, -2\alpha + 7]$ dan

$[v]_\alpha = [\alpha+1, -\alpha+8]$.
Tidak benar bahwa $u \prec v$ karena $v^-(1) \nless u^-(0)$. Tidak benar pula bahwa $v \prec u$ karena $v^+(0) \nless u^+(1)$.

Dua bilangan samar yang diambil sebagai contoh di atas adalah bilangan samar trapesium. Jika semua bilangan samar trapesium dihimpun, maka terbentuk himpunan semua bilangan samar trapesium. Dengan menggunakan definisi urutan $\prec$ pada $\mathcal{F}$, dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua bilangan trapesium tidak terbatas. Hal ini dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1
Untuk setiap bilangan samar v, terdapat bilangan samar trapesium u sehingga $v \prec u$.

Bukti:
Karena v^- terbatas, maka himpunan $\{v^-(\alpha)|\alpha \in [0,1]\}$ terbatas. Berdasarkan aksioma kelengkapan $\mathbb{R}$, $\inf\{v^-(\alpha)|\alpha \in [0,1]\}$ ada. Karena v^- tidak turun, maka $\inf\{v^-(\alpha)|\alpha \in [0,1]\} = v^-(0)$. Didefinisikan $t = \min\{v^-(0), v^+(1)\}$. Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, didefinisikan

$$u^-(\alpha) = \alpha + t - 3.$$

Karena v^+ terbatas, maka $\sup\{v^+(\alpha)|\alpha \in [0,1]\}$ ada. Karena v^+ tidak naik, $\sup\{v^+(\alpha)|\alpha \in [0,1]\} = v^+(0)$. Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, didefinisikan

$$u^+(\alpha) = -2\alpha + v^+(0) + 3.$$

Dibentuk bilangan samar u dengan setiap $\alpha \in [0,1]$, $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$.
Hal ini berarti $u^-(1) < t \le v^-(0)$ dan $u^+(1) > v^+(0)$. Akibatnya, $v \prec u$.
Bilangan samar u merupakan bilangan samar trapesium karena untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, dapat dipilih $a = t-3, b = t-2$, lalu $c = v^+(0)+1$, dan $d = v^+(0)+3$ sehingga

$$[u]_\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d].$$

■

Pada Teorema 4.1, setiap dipilih suatu bilangan samar, selalu ada bilangan samar trapesium yang lebih besar. Hal ini memunculkan suatu pertanyaan baru. Pertanyaan baru ini tentang jaminan eksistensi bilangan samar trapesium di antara dua bilangan samar (dengan menggunakan urutan $\prec$). Eksistensi bilangan samar trapesium ini dijamin oleh Teorema Densitas pada himpunan semua bilangan samar. Berikut ini pemaparan Teorema Densitas.

Teorema 4.2 (Teorema Densitas)
Diberikan bilangan samar x dan y. Jika bilangan $x \prec y$, maka ada bilangan samar trapesium t sehingga

$$x \prec t \prec y.$$

Bukti:
Karena $x \prec y$, maka $y^-(1) < x^-(0)$ dan $x^+(0) < y^+(1)$. Didefinisikan bilangan real $m = \frac{y^-(1)+x^-(0)}{2}$ dan $n = \frac{x^+(0)+y^+(1)}{2}$. Karena $m \in (y^-(1), x^-(0))$ dan $(y^-(1), x^-(0))$ terbuka di $\mathbb{R}$, maka ada $\varepsilon > 0$ sehingga

$$(m-\varepsilon, m+\varepsilon) \subseteq (y^-(1), x^-(0)).$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ didefinisikan

$$t^-(\alpha) = 2\varepsilon\alpha + (m-\varepsilon).$$

Karena $n \in (x^+(0), y^+(1))$ dan interval $(x^+(0), y^+(1))$ terbuka di $\mathbb{R}$, maka ada $\delta > 0$ sehingga $(n-\delta, n+\delta) \subseteq (x^+(0), y^+(1))$. Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ didefinisikan

$$t^+(\alpha) = -2\delta\alpha + (n+\delta).$$

Dibentuk t dengan untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku

$$[t]_\alpha = [2\varepsilon\alpha + (m-\varepsilon), -2\delta\alpha + (n+\delta)].$$

Akan dibuktikan t bilangan samar.

a) Fungsi t^- terbatas karena untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku
$$m-\varepsilon \le t^-(\alpha) \le m+\varepsilon.$$
Fungsi t^- tidak turun karena gradien t^- positif.
Fungsi t^- kontinu kiri pada $(0,1]$.

b) Fungsi t^+ terbatas karena untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku
$$n-\delta \le t^+(\alpha) \le n+\delta.$$
Fungsi t^+ tidak naik karena gradien t^+ negatif.
Fungsi t^+ kontinu kanan pada $(0,1]$.

c) Diambil sebarang $\gamma > 0$.
Akan dibuktikan t^- kontinu kanan di $\alpha = 0$.
Dipilih $\psi = \frac{\gamma}{6\varepsilon} > 0$, sehingga untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ jika $0 \le \alpha < \psi$, maka
$|t^-(\alpha) - t^-(0)| < |2\varepsilon\alpha|$

$= 2\varepsilon\alpha$
$< 2\varepsilon\psi$
$< \gamma$

Terbukti t^- kontinu kanan di $\alpha = 0$.

Akan dibuktikan t^+ kontinu kanan di $\alpha = 0$.

Dipilih $\phi = \frac{\gamma}{6\delta} > 0$ sehingga untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ jika $0 \leq \alpha < \phi$, maka $|t^+(\alpha) - t^+(0)| = |-2\delta\alpha|$
$= 2\delta\alpha$
$< 2\delta\phi$
$< \gamma$.

Terbukti t^+ kontinu kanan di $\alpha = 0$.

d) Nilai $t^-(1) = m + \varepsilon < x^-(0)$. Karena x^- tidak turun dan x bilangan samar, maka
$$x^-(0) \leq x^-(1) \leq x^+(1).$$
Di lain pihak, $x^+(1) \leq x^+(0)$. Kare- na $x^+(0) < n - \delta$, maka diperoleh $m + \varepsilon < n - \delta$. Didapat hubungan $t^-(1) \leq t^+(1)$.

Diperoleh t bilangan samar.

Bilangan t adalah bilangan samar trapesium karena dapat dipilih bilangan bilangan $a = m - \varepsilon$, $b = m + \varepsilon, c = n - \delta$, $d = n + \delta$ sehingga
$$[t]_\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d].$$

Akan dibuktikan $x \prec t \prec y$.

Karena $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subseteq (y^-(1), x^-(0))$, maka $t^-(1) = m + \varepsilon < x^-(0)$. Di lain pihak, $t^+(1) = n - \delta > x^+(0)$. Ini berarti
$$x \prec t.$$
Karena $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subseteq (y^-(1), x^-(0))$, maka $t^-(0) = m - \varepsilon > y^-(1)$. Di lain pihak, $t^+(0) = n + \delta < y^+(1)$. Ini berarti
$$t \prec y.$$
Diperoleh $x \prec t \prec y$.

■

Selanjutnya, akan dipaparkan contoh nyata penggunaan teorema 4.2 untuk mencari bilangan samar trapesium di antara dua bilangan samar.

Contoh 4.1

1) Diberikan bilangan samar 0_F dan b dengan untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ berlaku
$$[b]_\alpha = [\alpha - 3, -\alpha + 5].$$

Dalam contoh ini, hubungan yang berlaku adalah $0_F \prec b$. Fungsi b^- memiliki nilai maksimum -2. Fungsi b^+ memiliki nilai minimum 4. Dibentuk interval terbuka $(-2, 0)$ dan $(0, 4)$. Sementara itu, interval $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \subseteq (-2, 0)$ dan interval $(1, 3) \subseteq (0,4)$. Didefinisikan bilangan samar trapesium t dengan
$$[t]_\alpha = \left[\alpha - \frac{3}{2}, -2\alpha + 3\right].$$
Bilangan t yang telah didefinisikan memenuhi $0_F \prec t \prec b$.

2) Diberikan bilangan samar x dan y dengan $[x]_\alpha = \left[-\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1-\alpha}\right]$ dan $[y]_\alpha = \left[\frac{1}{2}\alpha - 2, -\alpha^2 + 3\right]$. Ber- dasarkan definisi x dan y, didapat
$\sup\{y^-(\alpha) | \alpha \in [0,1]\} = -\frac{3}{2}$,
$\inf\{x^-(\alpha) | \alpha \in [0,1]\} = -1$,
$\sup\{x^+(\alpha) | \alpha \in [0,1]\} = 1$, dan
$\inf\{y^+(\alpha) | \alpha \in [0,1]\} = 2$.

Lalu $\left(-\frac{5}{4} - \frac{1}{8}, -\frac{5}{4} + \frac{1}{8}\right) \subseteq \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ dan $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}, \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \subseteq (1, 2)$.

Dibentuk bilangan samar trapesium t dengan $[t]_\alpha = \left[\frac{1}{4}\alpha - \frac{11}{8}, -\frac{1}{2}\alpha + \frac{7}{4}\right]$. Bilangan t yang telah didefinisikan memenuhi $x \prec t \prec y$.

■

Pada bagian pertama Contoh 4.1, ditunjukkan bahwa terdapat bilangan samar trapesium t sehingga $0_F \prec t \prec b$. Berdasarkan Teorema Densitas, untuk sebarang bilangan samar b dengan $0_F \prec b$ terdapat bilangan samar trapesium t_b sehingga $0_F \prec t_b \prec b$. Hal ini menandakan bahwa tidak ada bilangan samar terkecil ε sehingga $\varepsilon \succ 0_F$.

Teorema 4.3

Diketahui a bilangan samar. Jika untuk setiap bilangan samar $\varepsilon \succ 0_F$, $0_F \preccurlyeq a \prec \varepsilon$, maka $a = 0_F$.

Bukti:
Andaikan $a \neq 0_F$. Karena $a \succcurlyeq 0_F$ dan $a \neq 0_F$, maka $a \succ 0_F$. Berdasarkan teorema 4.2, ada bilangan samar trapesium t sehingga $0_F \prec t \prec a$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan untuk setiap bilangan samar $\varepsilon > 0_F$ berlaku $a \prec \varepsilon$. Pengandaian salah dan harus diingkar. Pernyataan yang benar adalah $a = 0_F$.

I. KESIMPULAN

Untuk x, y bilangan samar, notasi $x \prec y$ memiliki makna $y^-(1) < x^-(0)$ dan $x^+(0) < y^+(1)$. Dengan mendefinisikan urutan $\prec$ pada $\mathcal{F}$, dapat dibuktikan Teorema Densitas pada $\mathcal{F}$. Di antara dua bilangan samar, namakan u dan v dengan $u \prec v$, terdapat bilangan samar trapesium t sehingga $u \prec t \prec v$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Densitas, dapat dibuktikan bahwa tidak ada bilangan samar terkecil ε sehingga $\varepsilon \succ 0_F$.

DAFTAR PUSTAKA

Basar, F. (2022). *Summability Theory And Its Applications* (Second). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781003294153

Benoumhani, M., & Jaballah, A. (2017). Finite fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, *321*, 101–114. https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.11.003

Elamir, E. E., El Sayed, M., Al Qarni, A. N., & El Safty, M. A. (2023). Decision-making to limit epidemics spread based on fuzzy-soft and topological spaces. *Alexandria Engineering Journal*, *74*, 725–735. https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.05.045

Fernández-Sánchez, J., & Úbeda-Flores, M. (2023). Quasilineability and topological properties of the set of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, *465*, 108562. https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108562

Kacprzak, D. (2017). Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. In *Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol. 356). https://doi.org/10.1007/978-3-319-59614-3_9

Rojas-Medar, M. A., Jiménez-Gamero, M. D., Chalco-Cano, Y., & Viera-Brandão, A. J. (2005). Fuzzy quasilinear spaces and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, *152*(2), 173–190. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.09.011

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*, 338–353. https://doi.org/10.1061/9780784413616.194